ECUACION DEL POTENCIAL DE VELOCIDADES DEL MOVIMIENTO IRROTACIONAL, ISENTROPICO, NO ESTACIONARIO, DE UN GAS IDEAL

Por GREGORIO MILLÁN,
Ingeniero Aeronáutico,
del I. N. T. A. «Esteban Terradas».

No suele hallarse en la literatura consagrada a estas cuestiones la deducción, y ni siquiera la expresión, de la ecuación diferencial del potencial de velocidades del movimiento irrotacional, isentrópico, no estacionario, de un gas ideal, la cual, sin embargo, no ofrece mayores dificultades que la del movimiento estacionario, abundantemente difundida en la literatura técnica correspondiente, y puede ofrecer interés en sí misma o como paso obligado para deducir la ecuación linealizada que se utiliza en el estudio de fenómenos no estacionarios, como aleteo de alas y timones, ráfagas, accionamiento de órganos de gobierno, etc.

El punto de partida (*) lo constituye el siguiente grupo de ecuaciones:

a) La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,(\nabla\,\mathbf{v}) + \mathbf{v}\,\nabla\,\rho = 0\,, \qquad [1]$$

siendo t el tiempo; ρ, la densidad del gas;

$$\mathbf{v} = \nabla\,\varphi,$$

la velocidad del movimiento; φ, el potencial de velocidades, y $\nabla = \mathbf{k}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ el operador de HAMILTON; en donde x_i son las coordenadas y $\mathbf{k}_i$ los versores que marcan las orientaciones de los ejes coordenados.

b) La ecuación de la presión, que en ausencia de fuerzas másicas (**) se escribe en la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v^2 + h = C\,(t)\,; \qquad [2]$$

siendo

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p}{\rho} \qquad [3]$$

la entalpía del gas; p, la presión, y $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$, la relación de calores específicos.

c) La ecuación de estado, que al ser el movimiento isentrópico se reduce a la:

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \text{Const.} \qquad [4]$$

La eliminación de p y ρ entre [1], [2] y [4] se efectúa sin dificultad; para ello basta expresar previamente h en función de ρ mediante [3] y [4], y calcular luego

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\,;$$

designando por

$$a = \sqrt{\frac{d\,p}{d\,\rho}} = \sqrt{\gamma\,\frac{p}{\rho}} \qquad [5]$$

la velocidad del sonido en el gas (variable de un punto a otro), entonces se tiene, indicando las derivadas con subíndices:

$$\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{a^2}\right)\varphi_{11} + \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{a^2}\right)\varphi_{22} + \left(1 - \frac{\varphi_3^2}{a^2}\right)\varphi_{33} -$$
$$- 2\,\frac{\varphi_1\,\varphi_2}{a^2}\,\varphi_{12} - 2\,\frac{\varphi_2\,\varphi_3}{a^3}\,\varphi_{23} - 2\,\frac{\varphi_3\,\varphi_1}{a^2}\,\varphi_{31} - \frac{1}{a^2}\,\varphi_{tt} - \qquad [6]$$
$$- 2\,\frac{\varphi_1}{a^2}\,\varphi_{1t} - 2\,\frac{\varphi_2}{a^2}\,\varphi_{2t} - 2\,\frac{\varphi_3}{a^2}\,\varphi_{3t} + \frac{1}{a^2}\,\frac{d\,C\,(t)}{d\,t} = 0;$$

en donde el valor de a^2 puede expresarse en función de las derivadas de φ mediante [2], [3] y [5], obteniéndose así para la determinación del potencial de velocidades una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, con cuatro variables independientes, de tipo *casi lineal.*

Las propiedades de las superficies características:

$$f\,(x_1, x_2, x_3, t) = 0\,, \qquad [7]$$

(*) V., p. e., G. MILLÁN: *Introducción a la Aerodinámica moderna,* I.N.T.A. "Esteban Terradas", 1949.

(**) Cuya influencia es despreciable en problemas de este tipo.

cuando son reales (ecuación hiperbólica) (*), se deducen de la ecuación diferencial cuadrática de primer orden:

$$\left(1-\frac{\varphi^2_1}{a^2}\right)f_1^2+\left(1-\frac{\varphi^2_2}{a^2}\right)f_2^2+\left(1-\frac{\varphi^2_3}{a^2}\right)f_3^2-$$
$$-2\frac{\varphi_1\varphi_2}{a^2}f_1f_2-2\frac{\varphi_2\varphi_3}{a^2}f_2f_3-2\frac{\varphi_3\varphi_1}{a^2}f_3f_1- \qquad [8]$$
$$-\frac{1}{a^2}f_t^2-2\frac{\varphi_1}{a^2}f_1f_t-2\frac{\varphi_2}{a^2}f_2f_t-2\frac{\varphi_3}{a^2}f_3f_t=0,$$

que, agrupando términos y multiplicando por a^2, puede escribirse en la forma:

$$a^2(f_1^2+f_2^2+f_3^2)-(\varphi_1f_1+\varphi_2f_2+\varphi_3f_3+f_t)^2=0. \qquad [9]$$

Teniendo presente que:

$$\alpha_i=\frac{f_i}{\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}}$$

es el coseno director en dirección x_i de la normal a [7]; que

$$v_n=\varphi_1\alpha_1+\varphi_2\alpha_2+\varphi_3\alpha_3 \qquad [10]$$

es la componente de la velocidad v normal a [7], y que

$$v_a=-\frac{f_t}{\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}} \qquad [11]$$

es la velocidad de avance normal de la familia de superficies [7] con respecto al parámetro t, al dividir [9] por $(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$ y extraer la raíz cuadrada, se obtiene:

$$v_p=v_a-v_n=\pm a; \qquad [12]$$

siendo v_p la velocidad de propagación de la superficie característica en el seno de la masa de gas. Por consiguiente, las superficies características son tales que su velocidad de propagación en el seno de la masa de gas es en cada punto la del sonido; estas superficies se llaman *ondas de* MACH.

En particular si el movimiento es estacionario ($v_a=0$) la velocidad del gas normal a la onda de MACH es la del sonido; por tanto:

$$v=|\nabla\varphi|\overline{>}|v_n|=a; \qquad [13]$$

es decir, en movimientos estacionarios las características son reales solamente si el movimiento es supersónico.

La integración de la ecuación [8] es imposible, excepto en casos especiales; pero es bien sabido que en muchos casos de interés técnico, en que existe una velocidad dominante uniforme, V_1, que supondremos paralela al eje x_1, alrededor de la cual se producen pequeñas perturbaciones (teoría lineal de perfiles, alas y cuerpos de revolución), que se traducen en perturbaciones también pequeñas de las presiones, densidades y temperaturas, es posible aproximar el problema haciendo lineal la ecuación [8]. Si es M el número de MACH correspondiente a la corriente no perturbada, cuyo valor supondremos no está próximo a la unidad; si el segundo miembro de [2] no depende del tiempo, y si las velocidades y aceleraciones de perturbación son pequeñas, el potencial φ de estas velocidades de perturbación, que debe superponerse al $V_1 x_1$ de la corriente uniforme, está determinado por la ecuación diferencial lineal:

$$(1-M^2)\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}-\frac{M^2}{V^2_1}\varphi_{tt}-2\frac{M^2}{V_1}\varphi_{1t}=0, \qquad [14]$$

que debe sustituir en procesos no estacionarios a la clásica de ondas:

$$(1-M^2)\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}=0, \qquad [15]$$

a la cual se reduce, como es sabido, en el estudio de movimientos estacionarios.

(*) V. G. MILLÁN: *Discontinuidades de las corrientes flúidas*, Seminario de Física Matemática, Facultad de Ciencias de Madrid, curso 1949-50.